

Division in Associative D -Algebra

Aleks Kleyn

ABSTRACT. From the symmetry between definitions of left and right divisors in associative D -algebra A , the possibility to define quotient as $A \otimes A$ -number follows. In the paper, I considered division and division with remainder. I considered also definition of prime A -number.

CONTENTS

1. Preface	1
2. Conventions	2
3. Geometry of Quotients	3
4. Division in D -Algebra	4
5. Division with Remainder	5
6. Highest Common Factor	9
7. Prime A -number	9
8. References	10
9. Index	11
10. Special Symbols and Notations	12

1. PREFACE

Let D be commutative ring. Let D -algebra A be associative.

Definition 1.1. A -number a is left divisor of A -number b , if there exists A -number c such that

$$(1.1) \quad ac = b$$

□

Definition 1.2. A -number a is right divisor of A -number b , if there exists A -number c such that

$$(1.2) \quad ca = b$$

□

Aleks_Kleyn@MailAPS.org.
<http://AleksKleyn.dyndns-home.com:4080/>.
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>.
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1.
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>.

²⁰¹⁰ **Mathematics Subject Classification:** Primary: 16-02;12-02;

Keywords: associative algebra; quotient; remainder.

It is evident that there is symmetry between definitions 1.1 and 1.2. The difference between left and right divisors is also evident since the product is noncommutative. However we can consider a definition generalizing definitions 1.1 and 1.2.

We may consider quotient of b divided by a as tuple of numbers c, d such that¹

$$cad = b$$

However we may consider division from another point of view.

Equations (1.1), (1.2) are examples of linear maps of D -algebra A . For commutative product, the equation (1.1) is only definition of linear map. For noncommutative product, $A \otimes A$ -number generates linear map of D -algebra A . For instance, the tensor $c \otimes d$ is $A \otimes A$ -number. Thus, we get the following definition.²

Definition 1.3. A -number a is divisor of A -number b , if there exists $A \otimes A$ -number c such that

$$c \circ a = b$$

$A \otimes A$ -number c is called **quotient** of A -number b divided by A -number a . □

In the paper [2], I considered equation

$$c \circ x = b$$

In this paper, I consider equation

$$x \circ a = b$$

D -algebra A is called **division algebra**, if for any A -number $a \neq 0$ there exists A -number a^{-1} .

2. CONVENTIONS

Convention 2.1. *Element of D -algebra A is called **A -number**. For instance, complex number is also called C -number, and quaternion is called H -number.* □

Convention 2.2. *Let A be Ω_1 -algebra. Let B be Ω_2 -algebra. Notation*

$$A \xrightarrow{*} B$$

means that there is representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B . □

¹Here somebody can argue that division is the inverse operation of multiplication. If product is commutative, then it follows from expression

$$ca = b$$

that

- c is factor; the product of c and a is equal to b .
- c is quotient of b divided by a .

Thus, for commutative product, definitions of factor and quotient coincide. For noncommutative product, we distinguish right and left divisors; therefore, we distinguish left and right quotient.

²Since the map

$$(1.3) \quad a \rightarrow cad$$

is bilinear, then, according to the theorem [3]-3.6.4, we may consider the map

$$a \rightarrow (c \otimes d) \circ a$$

instead of the map (1.3)

Convention 2.3. Let A be associative D -algebra. The representation

$$A \otimes A \xrightarrow{f} A \quad f(p) : a \rightarrow p \circ a$$

of D -module $A \otimes A$ generates the set of linear maps. This representation generates product \circ in D -module $A \otimes A$ according to rule

$$(p \circ q) \circ a = p \circ (q \circ a)$$

□

Without a doubt, the reader may have questions, comments, objections. I will appreciate any response.

3. GEOMETRY OF QUOTIENTS

Theorem 3.1. Let real field R be subfield of the center $Z(D)$ of the ring D . Then, for any A -numbers a, b , the set of quotients is convex.

Proof. Let $A \otimes A$ -number c be quotient of A -number b divided by A -number a

$$(3.1) \quad c \circ a = b$$

Let $A \otimes A$ -number d be quotient of A -number b divided by A -number a

$$(3.2) \quad d \circ a = b$$

Then, for any $t \in R$, $0 \leq t \leq 1$, from (3.1), (3.2), it follows that

$$\begin{aligned} (tc + (1-t)d) \circ a &= (tc) \circ a + ((1-t)d) \circ a \\ &= t(c \circ a) + (1-t)(d \circ a) = tb + (1-t)b = b \end{aligned}$$

Therefore, $A \otimes A$ -number $tc + (1-t)d$ is quotient of A -number b divided by A -number a . □

Theorem 3.2. Let $A \otimes A$ -numbers c, d be quotients of A -number b divided by A -number a

$$(3.3) \quad c \circ a = b$$

$$(3.4) \quad d \circ a = b$$

Then $A \otimes A$ -number $c - d$ is quotient of A -number 0 divided by A -number a

$$(3.5) \quad (c - d) \circ a = 0$$

Proof. From (3.3), (3.4), it follows that

$$(3.6) \quad (c - d) \circ a = c \circ a - d \circ a = b - b = 0$$

From (3.6), it follows that A -number $c - d$ is quotient of A -number 0 divided by A -number a . □

Remark 3.3. This point in the paper is interesting since it is easy to make mistake here and this mistake can be proved as a theorem. After we proved theorems 3.1, 3.2, the following question arises. If the difference of two quotients of A -number b divided by A -number a is quotient of A -number 0 divided by A -number a , then what is the structure of the set of quotient A -number 0 divided by any A -number? Or, equivalently, what is the structure of the set of quotients of A -number b divided by A -number a ?

Initially I wanted to prove the following statement.

Let A -number a be neither a left nor right zero divisor. Then the quotient of A -number 0 divided by A -number a has either the form $0ac$, or the form $ca0$.

The proof is very simple. Since $c \neq 0$ in the expression cad , then $d = 0$.

When I decided to write down the quotient as

$$c \otimes 0 + 0 \otimes d$$

I asked myself whether I was right. Indeed, according to theorems [1]-13.2.2, [5]-9.2.2, there exists nontrivial representation of zero tensor. \square

4. DIVISION IN D -ALGEBRA

Theorem 4.1. *Let D -algebra A be division algebra. Then, for any A -numbers a, b , there exist A -numbers c, d such that*

$$cad = b$$

Proof. To prove the theorem it suffices to put

$$c = ba^{-1} \quad d = e$$

or

$$c = e \quad d = a^{-1}b$$

\square

Theorem 4.2. *Let A -number a divide A -number b . Let A -number b divide A -number c . Then A -number a divides A -number c .*

Proof. According to the definition 1.3, since A -number a divides A -number b , then there exists $A \otimes A$ -number p such that

$$(4.1) \quad b = p \circ a$$

According to the definition 1.3, since A -number b divides A -number c , then there exists $A \otimes A$ -number q such that

$$(4.2) \quad c = q \circ b$$

From equations (4.1), (4.2), it follows that

$$(4.3) \quad c = q \circ (p \circ a) = (q \circ p) \circ a$$

According to the definition 1.3, from the equation (4.3), it follows that A -number a divides A -number c . \square

Theorem 4.3. *Let A -number a divide A -number b . Let A -number a divide A -number c . Then A -number a divides A -number $b + c$.*

Proof. According to the definition 1.3, since A -number a divides A -number b , then there exists $A \otimes A$ -number p such that

$$(4.4) \quad b = p \circ a$$

According to the definition 1.3, since A -number a divides A -number c , then there exists $A \otimes A$ -number q such that

$$(4.5) \quad c = q \circ a$$

From equations (4.4), (4.5), it follows that

$$(4.6) \quad b + c = p \circ a + q \circ a = (p + q) \circ a$$

According to the definition 1.3, from the equation (4.6), it follows that A -number a divides A -number $b + c$. \square

Theorem 4.4. *Let A -number a divide A -number b . Let c be $A \otimes A$ -number. Then A -number a divides A -number $c \circ b$.*

Proof. According to the definition 1.3, since A -number a divides A -number b , then there exists $A \otimes A$ -number p such that

$$(4.7) \quad b = p \circ a$$

From the equation (4.7), it follows that

$$(4.8) \quad c \circ b = c \circ (p \circ a) = (c \circ p) \circ a$$

According to the definition 1.3, from the equation (4.8), it follows that A -number a divides A -number $c \circ b$. \square

5. DIVISION WITH REMAINDER

Definition 5.1. *Let division in the D -algebra A is not always defined. **A -number a divides A -number b with remainder**, if the following equation is true*

$$(5.1) \quad c \circ a + f = b$$

$A \otimes A$ -number c is called **quotient** of A -number b divided by A -number a . A -number f is called **remainder of the division** of A -number b by A -number a . \square

Theorem 5.2. *For any A -numbers a, b , there exist quotient and remainder of the division of A -number b by A -number a .*

Proof. To prove the theorem, it is enough to assume that

$$\begin{aligned} c &= a \otimes a \\ f &= b - (a \otimes a) \circ a = b - aaa \end{aligned}$$

\square

From the theorem 5.2, it follows that, for given A -numbers a, b , a representation (5.1) is not unique. If we divide with remainder A -number f by A -number a , then we get

$$(5.2) \quad c' \circ a + f' = f$$

From (5.1), (5.2), it follows that

$$(5.3) \quad c \circ a + c' \circ a + f' = (c + c') \circ a + f' = b$$

How can we compare representations (5.1), (5.3), when order is not defined in D -algebra A ?

Therefore, the set of remainders of the division of A -number b by A -number a has form

$$(5.4) \quad A\{b, a\} = \{f \in A : f = b - c \circ a, c \in A \otimes A\}$$

If $0 \in A\{b, a\}$, then choice of remainder and corresponding quotient is evident. In general, a choice of a representative of the set $A\{b, a\}$ depends on properties of the algebra. In the algebra N of integers, we choose the smallest positive number. In the algebra $A[x]$ of polynomials, we choose polynomial which has the power less than

power of divisor. If there is norm in algebra A , (for instance, the algebra of integer quaternions), then we can chose A -number with the smallest norm as remainder.

Theorem 5.3. *Since*

$$(5.5) \quad A\{b, a\} \cap A\{c, a\} \neq \emptyset$$

then

5.3.1: A -number a **divides** A -number $b - c$ **without remainder**.

5.3.2: $A\{b, a\} = A\{c, a\}$

Proof. From the statement (5.5), it follows that there exists A -number

$$(5.6) \quad d \in A\{b, a\} \cap A\{c, a\}$$

From the statement (5.6) and from the definition (5.4), it follows that there exist $A \otimes A$ -numbers f, g such that

$$(5.7) \quad b = f \circ a + d$$

$$(5.8) \quad c = g \circ a + d$$

From equations (5.7), (5.8), it follows that

$$(5.9) \quad b - c = f \circ a - g \circ a = (f - g) \circ a$$

The statement 5.3.1 follows from the equation (5.9).

Let $m \in A\{b, a\}$. From the definition (5.4), it follows that there exist $A \otimes A$ -number n such that

$$(5.10) \quad b = n \circ a + m$$

From equations (5.7), (5.10), it follows that

$$(5.11) \quad f \circ a + d = n \circ a + m$$

From the equation (5.11), it follows that

$$(5.12) \quad d = n \circ a - f \circ a + m = (n - f) \circ a + m$$

From equations (5.8), (5.12), it follows that

$$(5.13) \quad c = g \circ a + (n - f) \circ a + m = (g + n - f) \circ a + m$$

From the definition (5.4) and the equation (5.13), it follows that there exist $m \in A\{c, a\}$. Therefore,

$$(5.14) \quad A\{b, a\} \subseteq A\{c, a\}$$

The same way, we prove the statement

$$(5.15) \quad A\{c, a\} \subseteq A\{b, a\}$$

The statement 5.3.2 follows from statements (5.14), (5.15). \square

From the theorem 5.3, it follows that, for given A -number a , the family of sets $A\{b, a\}$ generates equivalence $\text{mod } a$.

Definition 5.4. We define **canonical remainder $b \text{ mod } a$ of the division** of A -number b by A -number a as selected element of the set $A\{b, a\}$. The representation

$$c \circ a + (b \text{ mod } a) = b$$

of division with remainder is called **canonical**. \square

At first glance, the choice of A -number $b \bmod a$ is arbitrary. However we can define the natural constraints of the arbitrary choice.

Theorem 5.5. *If we define sum on the set $A/\bmod a$ according to the rule*

$$(5.16) \quad b \bmod a + c \bmod a = (b + c) \bmod a$$

then the set $A/\bmod a$ is Abelian group.

Proof. According to the definition 5.4, there exist $A \otimes A$ -numbers p, q such that

$$(5.17) \quad \begin{aligned} b &= p \circ a + b \bmod a \\ c &= q \circ a + c \bmod a \end{aligned}$$

From (5.17), it follows that

$$(5.18) \quad \begin{aligned} b + c &= p \circ a + b \bmod a + q \circ a + c \bmod a \\ &= (p + q) \circ a + b \bmod a + c \bmod a \end{aligned}$$

From equations (5.4), (5.18), it follows that

$$(5.19) \quad b \bmod a + c \bmod a \in A\{b + c, a\}$$

From the statement (5.19) and from the definition 5.4, it follows that sum (5.16) is well defined.

We verify commutativity of the sum (5.16) directly. \square

Theorem 5.6. *The representation*

$$D \dashrightarrow A/\bmod a$$

of ring D in Abelian group $A/\bmod a$ defined by the equation

$$(5.20) \quad d(b \bmod a) = (db) \bmod a$$

generates D -module $A/\bmod a$.

Proof. According to the definition 5.4, there exist $A \otimes A$ -number p such that

$$(5.21) \quad b = p \circ a + b \bmod a$$

From (5.21), it follows that

$$(5.22) \quad db = d(p \circ a) + d(b \bmod a) = (dp) \circ a + d(b \bmod a)$$

From equations (5.4), (5.22), it follows that

$$(5.23) \quad d(b \bmod a) \in A\{db, a\}$$

From the statement (5.23) and from the definition 5.4, it follows that representation (5.20) is well defined. \square

Theorem 5.7. *If we define product in D -module $A/\bmod a$ according to the rule*

$$(5.24) \quad (b \bmod a)(c \bmod a) = (bc) \bmod a$$

then D -module $A/\bmod a$ is D -algebra.

Proof. According to the definition 5.4, there exist $A \otimes A$ -numbers p, q such that

$$(5.25) \quad \begin{aligned} b &= p \circ a + b \bmod a \\ c &= q \circ a + c \bmod a \end{aligned}$$

From (5.25), it follows that

$$(5.26) \quad \begin{aligned} bc &= (p \circ a + b \bmod a)(q \circ a + c \bmod a) \\ &= (p \circ a)(q \circ a + c \bmod a) + (b \bmod a)(q \circ a + c \bmod a) \\ &= (p \circ a)b + (b \bmod a)(q \circ a) + (b \bmod a)(c \bmod a) \\ &= ((1 \otimes b) \circ p) \circ a + ((b \bmod a) \otimes 1) \circ q \circ a + (b \bmod a)(c \bmod a) \\ &= ((1 \otimes b) \circ p + ((b \bmod a) \otimes 1) \circ q) \circ a + (b \bmod a)(c \bmod a) \end{aligned}$$

From equations (5.4), (5.26), it follows that

$$(5.27) \quad (b \bmod a)(c \bmod a) \in A\{bc, a\}$$

From the statement (5.27) and from the definition 5.4, it follows that product (5.24) is well defined. \square

Theorem 5.8. *Let*

$$(5.28) \quad p \circ b + q = a$$

be canonical representation of division with remainder of A -number a by A -number b . Let

$$(5.29) \quad t \circ c + s = b$$

be canonical representation of division with remainder of A -number b by A -number c .

5.8.1: *Let*

$$(5.30) \quad u \circ c + v = p \circ s + q$$

be canonical representation of division with remainder of A -number $p \circ s + q$ by A -number c .

5.8.2: *Then the canonical representation of division with remainder of A -number a by A -number c has form*

$$(5.31) \quad (p \circ t + u) \circ c + v = a$$

Proof. From equations (5.28), (5.29), it follows that

$$(5.32) \quad a = p \circ (t \circ c + s) + q = p \circ t \circ c + p \circ s + q$$

The equation (5.32) is representation of division with remainder of A -number a by A -number c . From equations (5.30), (5.32), it follows that

$$(5.33) \quad a = p \circ t \circ c + u \circ c + v$$

The equation (5.31) follows from the equation (5.33). From the statement 5.8.1 and from the definition 5.4, it follows that

$$(5.34) \quad v = (p \circ s + q) \bmod c$$

From equations (5.4), (5.31), it follows that

$$(5.35) \quad v \in A\{a, c\}$$

From the statement (5.35) and from the definition 5.4, it follows that

$$(5.36) \quad v = a \bmod c$$

The statement 5.8.2 follows from the statement (5.36) and from the definition 5.4. \square

6. HIGHEST COMMON FACTOR

Definition 6.1. A -number c is called **common factor** of A -numbers a and b , if A -number c divides each of A -numbers a and b . If A -numbers a and b are not unit divisors and any common factor of A -numbers a and b is not unit divisor, then A -numbers a and b are called **relatively prime**. \square

Definition 6.2. A -number c is called **highest common factor** of A -numbers a and b , if A -number c is common factor of A -numbers a and b and any common factor d of A -numbers a and b divides A -number c . \square

7. PRIME A -NUMBER

Definition 7.1. Let A -number b be not unit divisor of D -algebra A . A -number b is called **prime**, if any divisor a of A -number b satisfies one of the following conditions.

7.1.1: A -number a is unit divisor.

7.1.2: Quotient of A -number b divided by A -number a is unit divisor of D -algebra $A \otimes A$. \square

Theorem 7.2. Let D -algebra A is division algebra. Let $A[x]$ be algebra of polynomials over D -algebra A . Polynomial of power 1 is prime $A[x]$ -number.

Proof. Let p be polynomial of power 1. Let q be polynomial. Let

$$(7.1) \quad p = (r_1 \otimes r_2) \circ q = r_1 q r_2$$

be canonical representation of division with remainder of polynomial p over polynomial q . Here r_1, r_2 are polynomials. According to the theorems [4]-5.9, [6]-20,

$$(7.2) \quad \deg r_1 + \deg q + \deg r_2 = \deg p = 1$$

From the equation (7.2), it follows that only one polynomial q, r_1, r_2 has power 1, and other two polynomials are A -numbers.

- Since the polynomial q is A -number, then the polynomial q is unit divisor and satisfies the condition 7.1.1.
- Since q is polynomial of power 1, then, according to the theorems [6]-28, [4]-6.10,

$$(7.3) \quad p = r \circ q$$

where r is $A \otimes A$ -number. Since p and q are polynomials of power 1, then, according to the theorems [6]-28, [4]-6.10,

$$(7.4) \quad q = r' \circ p + s$$

where r' is $A \otimes A$ -number and s is A -number. From equations (7.3), (7.4), it follows that

$$(7.5) \quad p = r \circ r' \circ p + r \circ s$$

From the equation (7.5), it follows that

$$(7.6) \quad r \circ r' = 1 \otimes 1 \quad r \circ s = 0$$

From the equation (7.6), it follows that $A \otimes A$ -number r is unit divisor and $s = 0$. Therefore, the polynomial q satisfies the condition 7.1.2.

According to the definition 7.1, the polynomial p is prime $A[x]$ -number. □

8. REFERENCES

- [1] Aleks Kleyn, Lectures on Linear Algebra over Division Ring, eprint [arXiv:math.GM/0701238](#) (2010)
- [2] Aleks Kleyn, Linear Equation in Finite Dimensional Algebra, eprint [arXiv:0912.4061](#) (2010)
- [3] Aleks Kleyn, Linear Maps of Free Algebra, eprint [arXiv:1003.1544](#) (2010)
- [4] Aleks Kleyn, Polynomial over Associative D -Algebra, eprint [arXiv:1302.7204](#) (2013)
- [5] Aleks Kleyn.
Linear Algebra over Division Ring: Vector Space.
CreateSpace, 2014; ISBN-13: 978-1499324006
- [6] Aleks Kleyn, Polynomial over Associative D -Algebra.
Clifford Analysis, Clifford Algebras and their applications, Vol 2, Issue 2,
pages 97 - 115, 2013

9. INDEX

A -number 2
canonical remainder of the division 6
canonical representation of division with
 remainder 6
common factor 9

division algebra 2
division with remainder 5
division without remainder 6

highest common factor 9

prime A -number 9

quotient 2, 5

relatively prime A -numbers 9
remainder of the division 5

10. SPECIAL SYMBOLS AND NOTATIONS

$b \bmod a$ canonical remainder of the
division 6

Деление в ассоциативной D -алгебре

Александр Клейн

Аннотация. Из симметрии между определениями левого и правого делителей в ассоциативной D -алгебре A следует возможность определить частное как $A \otimes A$ -число. В статье рассмотрены деление и деление с остатком. Я рассмотрел также понятие простого A -числа.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Предисловие	1
2. Соглашения	2
3. Геометрия частных	3
4. Деление в D -алгебре	4
5. Деление с остатком	5
6. Наибольший общий делитель	9
7. Простое A -число	9
8. Список литературы	10
9. Предметный указатель	11
10. Специальные символы и обозначения	12

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Пусть D - коммутативное кольцо. Мы будем предполагать, что D -алгебра A ассоциативна.

Определение 1.1. A -число a называется левым делителем A -числа b , если существует A -число c такое, что

$$(1.1) \quad ac = b$$

□

Определение 1.2. A -число a называется правым делителем A -числа b , если существует A -число c такое, что

$$(1.2) \quad ca = b$$

Aleks_Kleyn@MailAPS.org.
<http://AleksKleyn.dyndns-home.com:4080/>.
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>.
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1.
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>.

²⁰¹⁰ **Mathematics Subject Classification:** Primary: 16-02;12-02;

Keywords: ассоциативная алгебра; частное; остаток.

□

Симметрия между определениями 1.1 и 1.2 очевидна. Также как очевидно различие между левым и правым делителями в связи с некоммутативностью произведения. Однако мы можем рассмотреть определение, обобщающее определения 1.1 и 1.2.

Мы можем рассматривать частное от деления b на a как пару чисел c, d таких, что¹

$$cad = b$$

Однако мы можем рассмотреть операцию деления с другой точки зрения.

Равенства (1.1), (1.2) являются примерами линейных отображений D -алгебры A . В коммутативном случае равенство (1.1) является единственным определением линейного отображения. В некоммутативном случае, линейное отображение D -алгебры A порождается $A \otimes A$ -числом. Например, тензор $c \otimes d$ является $A \otimes A$ -числом. Таким образом, мы получаем следующее определение.²

Определение 1.3. A -число a называется делителем A -числа b , если существует $A \otimes A$ -число c такое, что

$$c \circ a = b$$

$A \otimes A$ -число c называется **частным от деления** A -числа b на A -число a . □

В статье [2] я рассмотрел уравнение

$$c \circ x = b$$

В этой статье я рассматриваю уравнение

$$x \circ a = b$$

D -алгебра A называется **алгеброй с делением**, если для любого A -числа $a \neq 0$ существует A -число a^{-1} .

2. СОГЛАШЕНИЯ

Соглашение 2.1. *Элемент D -алгебры A называется A -числом. Например, комплексное число также называется C -числом, а кватернион называется H -числом.* □

¹Здесь можно возразить, что деление - это операция, обратная умножению. В коммутативном случае, из выражения

$$ca = b$$

следует, что

- c является множителем, произведение c и a равно b .
- c является частным деления b на a .

Таким образом, в коммутативном случае определения множителя и частного совпадают. В некоммутативном случае, мы различаем правый и левый делители; следовательно, мы различаем левое и правое частное.

²Так как отображение

$$(1.3) \quad a \rightarrow cad$$

билинейно, то, согласно теореме [3]-3.6.4, мы можем рассматривать отображение

$$a \rightarrow (c \otimes d) \circ a$$

вместо отображения (1.3).

Соглашение 2.2. Пусть A - Ω_1 -алгебра. Пусть B - Ω_2 -алгебра. Запись

$$A \xrightarrow{*} B$$

означает, что определено представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B . \square

Соглашение 2.3. Пусть A ассоциативная D -алгебра. Представление

$$A \otimes A \xrightarrow{f} A \quad f(p) : a \rightarrow p \circ a$$

D -модуля $A \otimes A$ порождает множество линейных отображений. Это представление порождает произведение \circ в D -модуле $A \otimes A$ согласно правилу

$$(p \circ q) \circ a = p \circ (q \circ a)$$

\square

Без сомнения, у читателя могут быть вопросы, замечания, возражения. Я буду признателен любому отзыву.

3. ГЕОМЕТРИЯ ЧАСТНЫХ

Теорема 3.1. Пусть поле действительных чисел R является подполем центра $Z(D)$ кольца D . Тогда для любых A -чисел a, b множество частных выпукло.

Доказательство. Пусть $A \otimes A$ -число c является частным от деления A -числа b на A -число a

$$(3.1) \quad c \circ a = b$$

Пусть $A \otimes A$ -число d является частным от деления A -числа b на A -число a

$$(3.2) \quad d \circ a = b$$

Тогда для любого $t \in R$, $0 \leq t \leq 1$, из (3.1), (3.2) следует, что

$$\begin{aligned} (tc + (1-t)d) \circ a &= (tc) \circ a + ((1-t)d) \circ a \\ &= t(c \circ a) + (1-t)(d \circ a) = tb + (1-t)b = b \end{aligned}$$

Следовательно, $A \otimes A$ -число $tc + (1-t)d$ является частным от деления A -числа b на A -число a \square

Теорема 3.2. Пусть $A \otimes A$ -числа c, d являются частными от деления A -числа b на A -число a

$$(3.3) \quad c \circ a = b$$

$$(3.4) \quad d \circ a = b$$

Тогда $A \otimes A$ -число $c - d$ является частным от деления A -числа 0 на A -число a

$$(3.5) \quad (c - d) \circ a = 0$$

Доказательство. Из (3.3), (3.4) следует, что

$$(3.6) \quad (c - d) \circ a = c \circ a - d \circ a = b - b = 0$$

Из (3.6) следует, что A -число $c - d$ является частным от деления A -числа 0 на A -число a . \square

Замечание 3.3. Это место в статье очень интересно тем, что здесь очень легко совершить ошибку, которую легко доказать как теорему. После доказательства теорем 3.1, 3.2, естественно возникает следующий вопрос. Если разность двух частных от деления A -числа b на A -число a является частным от деления A -числа 0 на A -число a , то какова структура множества частных от деления A -числа 0 на A -число a ? Или, что тоже самое, какова структура множества частных от деления A -числа b на A -число a ?

Вначале я хотел доказать следующее утверждение.

Пусть A -число a не является ни левым, ни правым делителем нуля. Тогда частное от деления A -числа 0 на A -число a имеет либо вид $0ac$, либо вид $ca0$.

Доказательство очень просто. Если $c \neq 0$ в выражении cad , то $d = 0$.

Когда я решил записать частное в виде

$$c \otimes 0 + 0 \otimes d$$

я подумал прав ли я. Действительно, согласно теоремам [1]-13.2.2, [5]-9.2.2, существует нетривиальная запись нулевого тензора. \square

4. ДЕЛЕНИЕ В D -АЛГЕБРЕ

Теорема 4.1. *Если D -алгебра A является алгеброй с делением, то для любых A -чисел a, b существуют A -числа c, d такие, что*

$$cad = b$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно положить

$$c = ba^{-1} \quad d = e$$

или

$$c = e \quad d = a^{-1}b$$

\square

Теорема 4.2. *Пусть A -число a делит A -число b . Пусть A -число b делит A -число c . Тогда A -число a делит A -число c .*

Доказательство. Согласно определению 1.3, так как A -число a делит A -число b , то существует $A \otimes A$ -число p такое, что

$$(4.1) \quad b = p \circ a$$

Согласно определению 1.3, так как A -число b делит A -число c , то существует $A \otimes A$ -число q такое, что

$$(4.2) \quad c = q \circ b$$

Из равенств (4.1), (4.2) следует, что

$$(4.3) \quad c = q \circ (p \circ a) = (q \circ p) \circ a$$

Согласно определению 1.3, из равенства (4.3) следует, что A -число a делит A -число c . \square

Теорема 4.3. *Пусть A -число a делит A -число b . Пусть A -число a делит A -число c . Тогда A -число a делит A -число $b + c$.*

Доказательство. Согласно определению 1.3, так как A -число a делит A -число b , то существует $A \otimes A$ -число p такое, что

$$(4.4) \quad b = p \circ a$$

Согласно определению 1.3, так как A -число a делит A -число c , то существует $A \otimes A$ -число q такое, что

$$(4.5) \quad c = q \circ a$$

Из равенств (4.4), (4.5) следует, что

$$(4.6) \quad b + c = p \circ a + q \circ a = (p + q) \circ a$$

Согласно определению 1.3, из равенства (4.6) следует, что A -число a делит A -число $b + c$. \square

Теорема 4.4. Пусть A -число a делит A -число b . Пусть c является $A \otimes A$ -числом. Тогда A -число a делит A -число $c \circ b$.

Доказательство. Согласно определению 1.3, так как A -число a делит A -число b , то существует $A \otimes A$ -число p такое, что

$$(4.7) \quad b = p \circ a$$

Из равенств (4.7) следует, что

$$(4.8) \quad c \circ b = c \circ (p \circ a) = (c \circ p) \circ a$$

Согласно определению 1.3, из равенства (4.8) следует, что A -число a делит A -число $c \circ b$. \square

5. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Определение 5.1. Пусть деление в D -алгебре A не всегда определено. A -число a делит A -число b с остатком, если следующее равенство верно

$$(5.1) \quad c \circ a + f = b$$

$A \otimes A$ -число c называется **частным от деления** A -числа b на A -число a . A -число f называется **остаток от деления** A -числа b на A -число a . \square

Теорема 5.2. Для любых A -чисел a, b , существует частное и остаток от деления A -числа b на A -число a .

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно положить

$$c = a \otimes a$$

$$f = b - (a \otimes a) \circ a = b - aaa$$

\square

Из теоремы 5.2 следует, что для заданных A -чисел a, b представление (5.1) определено не однозначно. Если мы поделим с остатком A -число f на A -число a , то мы получим

$$(5.2) \quad c' \circ a + f' = f$$

Из (5.1), (5.2) следует, что

$$(5.3) \quad c \circ a + c' \circ a + f' = (c + c') \circ a + f' = b$$

Как мы можем сравнить представления (5.1), (5.3), если отношение порядка не определено в D -алгебре A ?

Следовательно, множество остатков от деления A -числа b на A -число a имеет вид

$$(5.4) \quad A\{b, a\} = \{f \in A : f = b - c \circ a, c \in A \otimes A\}$$

Если $0 \in A\{b, a\}$, то выбор остатка и соответствующего частного очевиден. Вообще говоря, выбор представителя множества $A\{b, a\}$ зависит от свойств алгебры. В алгебре N целых чисел мы выбираем наименьшее положительное число. В алгебре $A[x]$ многочленов мы выбираем многочлен степени меньше степени делителя. Если в алгебре A определена норма (например, алгебра целых кватернионов), то в качестве остатка мы можем выбрать A -число с наименьшей нормой.

Теорема 5.3. *Если*

$$(5.5) \quad A\{b, a\} \cap A\{c, a\} \neq \emptyset$$

то

5.3.1: A -число a делит A -число $b - c$ без остатка.

5.3.2: $A\{b, a\} = A\{c, a\}$

Доказательство. Из утверждения (5.5) следует, что существует A -число

$$(5.6) \quad d \in A\{b, a\} \cap A\{c, a\}$$

Из утверждения (5.6) и определения (5.4) следует, что существуют $A \otimes A$ -числа f, g такие, что

$$(5.7) \quad b = f \circ a + d$$

$$(5.8) \quad c = g \circ a + d$$

Из равенств (5.7), (5.8) следует, что

$$(5.9) \quad b - c = f \circ a - g \circ a = (f - g) \circ a$$

Утверждение 5.3.1 является следствием равенства (5.9).

Пусть $m \in A\{b, a\}$. Из определения (5.4) следует, что существует $A \otimes A$ -число n такие, что

$$(5.10) \quad b = n \circ a + m$$

Из равенств (5.7), (5.10) следует, что

$$(5.11) \quad f \circ a + d = n \circ a + m$$

Из равенства (5.11) следует, что

$$(5.12) \quad d = n \circ a - f \circ a + m = (n - f) \circ a + m$$

Из равенств (5.8), (5.12) следует, что

$$(5.13) \quad c = g \circ a + (n - f) \circ a + m = (g + n - f) \circ a + m$$

Из определения (5.4) и равенства (5.13) следует, что существует $m \in A\{c, a\}$. Следовательно,

$$(5.14) \quad A\{b, a\} \subseteq A\{c, a\}$$

Аналогичным образом мы доказываем утверждение

$$(5.15) \quad A\{c, a\} \subseteq A\{b, a\}$$

Утверждение 5.3.2 является следствием утверждений (5.14), (5.15). \square

Из теоремы 5.3 следует, что для данного A -числа a семейство множеств $A\{b, a\}$ порождает отношение эквивалентности $\text{mod } a$.

Определение 5.4. Определим каноническое частное $b \text{ mod } a$ от деления A -числа b на A -число a как выбранный элемент множества $A\{b, a\}$. Представление

$$c \circ a + (b \text{ mod } a) = b$$

деления c с остатком называется каноническим. \square

На первый взгляд, выбор A -числа $b \text{ mod } a$ произволен. Однако мы можем определить естественные границы этого произвола.

Теорема 5.5. Если мы определим сложение на множестве $A/\text{mod } a$ согласно правилу

$$(5.16) \quad b \text{ mod } a + c \text{ mod } a = (b + c) \text{ mod } a$$

то множество $A/\text{mod } a$ является абелевой группой.

Доказательство. Согласно определению 5.4, существуют $A \otimes A$ -числа p, q такие, что

$$(5.17) \quad \begin{aligned} b &= p \circ a + b \text{ mod } a \\ c &= q \circ a + c \text{ mod } a \end{aligned}$$

Из (5.17) следует, что

$$(5.18) \quad \begin{aligned} b + c &= p \circ a + b \text{ mod } a + q \circ a + c \text{ mod } a \\ &= (p + q) \circ a + b \text{ mod } a + c \text{ mod } a \end{aligned}$$

Из равенств (5.4), (5.18) следует, что

$$(5.19) \quad b \text{ mod } a + c \text{ mod } a \in A\{b + c, a\}$$

Из утверждения (5.19) и определения 5.4 следует корректность определения (5.16) суммы.

Коммутативность суммы (5.16) доказывается непосредственной проверкой. \square

Теорема 5.6. Представление

$$D \dashrightarrow A/\text{mod } a$$

кольца D в абелевой группе $A/\text{mod } a$ определено равенством

$$(5.20) \quad d(b \text{ mod } a) = (db) \text{ mod } a$$

порождает D -модуль $A/\text{mod } a$.

Доказательство. Согласно определению 5.4, существует $A \otimes A$ -число p такое, что

$$(5.21) \quad b = p \circ a + b \bmod a$$

Из (5.21) следует, что

$$(5.22) \quad db = d(p \circ a) + d(b \bmod a) = (dp) \circ a + d(b \bmod a)$$

Из равенств (5.4), (5.22) следует, что

$$(5.23) \quad d(b \bmod a) \in A\{db, a\}$$

Из утверждения (5.23) и определения 5.4 следует корректность определения (5.20) представления. \square

Теорема 5.7. Если мы определим умножение в D -модуле $A/\bmod a$ согласно правилу

$$(5.24) \quad (b \bmod a)(c \bmod a) = (bc) \bmod a$$

то D -модуль $A/\bmod a$ является D -алгеброй.

Доказательство. Согласно определению 5.4, существуют $A \otimes A$ -числа p, q такие, что

$$(5.25) \quad \begin{aligned} b &= p \circ a + b \bmod a \\ c &= q \circ a + c \bmod a \end{aligned}$$

Из (5.25) следует, что

$$(5.26) \quad \begin{aligned} bc &= (p \circ a + b \bmod a)(q \circ a + c \bmod a) \\ &= (p \circ a)(q \circ a + c \bmod a) + (b \bmod a)(q \circ a + c \bmod a) \\ &= (p \circ a)b + (b \bmod a)(q \circ a) + (b \bmod a)(c \bmod a) \\ &= ((1 \otimes b) \circ p) \circ a + (((b \bmod a) \otimes 1) \circ q) \circ a + (b \bmod a)(c \bmod a) \\ &= ((1 \otimes b) \circ p + ((b \bmod a) \otimes 1) \circ q) \circ a + (b \bmod a)(c \bmod a) \end{aligned}$$

Из равенств (5.4), (5.26) следует, что

$$(5.27) \quad (b \bmod a)(c \bmod a) \in A\{bc, a\}$$

Из утверждения (5.27) и определения 5.4 следует корректность определения (5.24) произведения. \square

Теорема 5.8. Пусть

$$(5.28) \quad p \circ b + q = a$$

является каноническим представлением деления с остатком A -числа a на A -число b . Пусть

$$(5.29) \quad t \circ c + s = b$$

является каноническим представлением деления с остатком A -числа b на A -число c .

5.8.1: Пусть

$$(5.30) \quad u \circ c + v = p \circ s + q$$

является каноническим представлением деления с остатком A -числа $p \circ s + q$ на A -число c .

5.8.2: Тогда каноническое представление деления с остатком A -числа a на A -число c имеет вид

$$(5.31) \quad (p \circ t + u) \circ c + v = a$$

Доказательство. Из равенств (5.28), (5.29) следует, что

$$(5.32) \quad a = p \circ (t \circ c + s) + q = p \circ t \circ c + p \circ s + q$$

Равенство (5.32) является представлением деления с остатком A -числа a на A -число c . Из равенств (5.30), (5.32) следует, что

$$(5.33) \quad a = p \circ t \circ c + u \circ c + v$$

Равенство (5.31) является следствием равенства (5.33). Из утверждения 5.8.1 и определения 5.4 следует, что

$$(5.34) \quad v = (p \circ s + q) \bmod c$$

Из равенств (5.4), (5.31) следует, что

$$(5.35) \quad v \in A\{a, c\}$$

Из утверждения (5.35) и определения 5.4 следует, что

$$(5.36) \quad v = a \bmod c$$

Утверждение 5.8.2 является следствием утверждения (5.36) и определения 5.4. \square

6. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

Определение 6.1. A -число c называется **общим делителем** A -чисел a и b , если A -число c делит каждое из A -чисел a и b . Если A -числа a и b не являются делителями единицы и любой общий делитель A -чисел a и b не является делителем единицы, то A -числа a и b называются **взаимно простыми**. \square

Определение 6.2. A -число c называется **наибольшим общим делителем** A -чисел a и b , если A -число c является общим делителем A -чисел a и b и любой общий делитель d A -чисел a и b делит A -число c . \square

7. ПРОСТОЕ A -ЧИСЛО

Определение 7.1. Пусть A -число b не является делителем единицы D -алгебры A . A -число b называется **простым**, если любой делитель a A -числа b удовлетворяет одному из следующих условий.

7.1.1: A -число a является делителем единицы.

7.1.2: Частное от деления A -числа b на A -число a является делителем единицы D -алгебры $A \otimes A$. \square

Теорема 7.2. Пусть D -алгебра A является алгеброй с делением. Рассмотрим алгебру многочленов $A[x]$ над D -алгеброй A . Многочлен степени 1 является простым $A[x]$ -числом.

Доказательство. Пусть p - многочлен степени 1. Пусть q - многочлен. Пусть

$$(7.1) \quad p = (r_1 \otimes r_2) \circ q = r_1 q r_2$$

каноническая форма деления с остатком многочлена p на многочлен q . Здесь r_1, r_2 - многочлены. Согласно теоремам [4]-5.9, [6]-20,

$$(7.2) \quad \deg r_1 + \deg q + \deg r_2 = \deg p = 1$$

Из равенства (7.2) следует, что только один многочлен q, r_1, r_2 имеет степень 1, и остальные два многочлена являются A -числами.

- Если многочлен q является A -числом, то многочлен q является делителем единицы и удовлетворяет условию 7.1.1.
- Если степень многочлена q равна 1, то, согласно теоремам [4]-6.10, [6]-28,

$$(7.3) \quad p = r \circ q$$

где r является $A \otimes A$ -числом. Так как p, q - многочлены степени 1, то, согласно теоремам [4]-6.10, [6]-28,

$$(7.4) \quad q = r' \circ p + s$$

где r' является $A \otimes A$ -числом и s является A -числом. Из равенств (7.3), (7.4) следует, что

$$(7.5) \quad p = r \circ r' \circ p + r \circ s$$

Из равенства (7.5) следует, что

$$(7.6) \quad r \circ r' = 1 \otimes 1 \quad r \circ s = 0$$

Из равенства (7.6) следует, что $A \otimes A$ -число r является делителем единицы и $s = 0$. Следовательно, многочлен q удовлетворяет условию 7.1.2.

Согласно определению 7.1, многочлен p является простым $A[x]$ -числом. \square

8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александр Клейн, Лекции по линейной алгебре над телом, eprint [arXiv:math.GM/0701238](#) (2010)
- [2] Александр Клейн, Линейное уравнение в конечномерной алгебре, eprint [arXiv:0912.4061](#) (2010)
- [3] Александр Клейн, Линейные отображения свободной алгебры, eprint [arXiv:1003.1544](#) (2010)
- [4] Александр Клейн, Многочлен над ассоциативной D -алгеброй, eprint [arXiv:1302.7204](#) (2013)
- [5] Александр Клейн.
Линейная алгебра над телом: Векторное пространство.
CreateSpace, 2014; ISBN-13: 978-1499323948
- [6] Aleks Kleyn, Polynomial over Associative D -Algebra.
Clifford Analysis, Clifford Algebras and their applications, Vol 2, Issue 2,
pages 97 - 115, 2013

9. ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

A -число 2

алгебра с делением 2

взаимно простые A -числа 9

деление без остатка 6

деление с остатком 5

каноническое представление деления с
остатком 7

наибольший общий делитель 9

общий делитель 9

остаток от деления 5

простое A -число 9

частное от деления 2, 5

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

$b \bmod a$ каноническое частное от
деления 7